Διάλεξη

9/11/2019

Διαφορική Γεωμετρία

Άσκηση: Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f(x,y,z) = (x+y+z-1)^2$

$g(x,y,z) = x^2yz$

Εξετάστε για ποιες τιμές του $a\in\mathbb{R}$, τα σύνολα $f^{-1}(a)$, $g^{-1}(a)$ είναι κανονικές επιφάνειες.

Λύση

Αναζητώ τα κρίσιμα σημεία της f (λύνοντας το σύστημα $f_x = f_y = f_z = 0 \iff 2(x+y+z-1) = 0$)

Άρα το σύνολο των κρισίμων σημείων της f είναι το επίπεδο $(\pi): x+y+z-1=0$

$$f^{-1}(a) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=a\} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (x+y+z-1)^2 = a\}$$

Πρέπει $a\geq 0$.

- Αν $a>0 \Rightarrow f^{-1}(a)$ δεν περιέχει κανένα κρίσιμο σημείο και επομένως είναι κανονική επιφάνεια σύμφωνα με το θεώρημα.
- Αν $a=0 \Rightarrow f^{-1}(a) = f^{-1}(0) = \pi =$ σύνολο των κρισίμων σημείων και άρα το θεώρημα δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Όμως επειδή $f^{-1}(a) = (\pi)$ είναι κανονική επιφάνεια.

Αναζητώ τα κρίσιμα σημεία της
$g_x = 0 \iff 2xyz = 0$
$g_y = 0 \iff x^2z = 0$
$g_z = 0 \iff x^2y = 0$

$(0,y,z)$

Αν $x\neq 0$ τότε $y=0=z$.

Το σύνολο των κρισίμων σημείων της g είναι το $Oyz \cup Ox$

$g^{-1}(a) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=a\}$

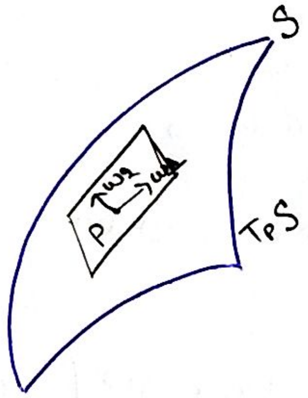
$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2yz = a\}$

• Αν $a \neq 0$ τοτε το συνολο $g^{-1}(a)$ δεν περιεχει κανενα κρισιμο σημειο, αρα ειναι κανονικη επιφανεια συμφωνα με το θεωρημα.

• Αν $a=0$, $g^{-1}(a) = g^{-1}(0) = O_{xy} \cup O_{xz} \cup O_{yz}$

Δεν ειναι κανονικη επιφανεια γιατι κοντα στο $(0,0,0) \in S$ καμια απο τις 3 προβολες δεν ειναι 1-1 και οχι διαφορισιμα

~o~o~o~o~o



$$T_pS \subseteq T_p\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$$

$$\langle (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Περιορι̇ζοντας το $\langle , \rangle$ στο T_pS εχω ενα εσωτερικο γινομενο

$$\langle , \rangle_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}.$$

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3$$

$$\|w_1+w_2\|^2 = \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + 2\langle w_1, w_2\rangle_p$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle w_1,w_2\rangle_p = \frac{1}{2}\{\|w_1+w_2\|^2 - \|w_1\|^2 - \|w_2\|^2\}$$

Η αντιστοιχη τετραγωνικη μορφη του $\langle , \rangle_p$

$T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$

$T_pS \to \mathbb{R}$

$T_pS \ni w \to \langle w,w\rangle_p = \|w\|^2$

Πρωτη Θεμελιωδης

<u>Ορισμος:</u> Καλειται πρωτη θεμελιωδης μορφη κανονικης επιφανειας S, την τετραγωνικη μορφη $I_p : T_pS \to \mathbb{R}$

$$I_p(w) = \|w\|^2 = \langle w,w\rangle_p, \quad \forall w \in T_pS$$

$$\langle w_1,w_2\rangle_p = \frac{1}{2}\{I_p(w_1+w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2)\}$$

$I_p(w) \geq 0$, $I_p(w) = 0 \Leftrightarrow w=0$

δηλ. η I_p ειναι θετικη ορισμενη

Μετρικές ιδιότ. μεγεθών της I

• **Μήκος εφαπτ. διαν.:**

$$w \in T_pS \, , \quad \|w\| = \sqrt{\langle w, w\rangle_p} = \sqrt{I_p(w)}$$

• **Γωνία διανυσμάτων:** $w_1, w_2 \in T_pS - \{0\}$

$$\cos\phi = \frac{\langle w_1, w_2\rangle_p}{\sqrt{I_p(w_1)}\,\sqrt{I_p(w_2)}}$$

• **Μήκος καμπύλης:** $c: I \to S$ λεία επιφανειακή καμπύλη με παράμετρο $t \in I$:

$$L_a^b(c) = \int_a^b \|c'(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{I_{c(t)}(c'(t))}\,dt.$$

• **Μήκος τόξου:** $s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{I_{c(u)}(c'(u))}\,du$

Γωνία τεμνομένων καμπυλών:

$\{X_u(q), X_v(q)\}$ είναι βάση T_pS, $\forall w \in T_pS$

$w = a X_u(q) + b X_v(q)$

Ο πίνακας της I_p είναι: $\begin{bmatrix} \langle X_u, X_u\rangle(q) & \langle X_u, X_v\rangle(q) \\ \langle X_u, X_v\rangle(q) & \langle X_v, X_v\rangle(q) \end{bmatrix}$

Θεμελιώδη ποσά $1^{ης}$ τάξης είναι οι συναρτήσεις.

$E, F, G: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{aligned} E(u,v) &= \langle X_u(u,v), X_u(u,v)\rangle \\ F(u,v) &= \langle X_u(u,v), X_v(u,v)\rangle \\ G(u,v) &= \langle X_v(u,v), X_v(u,v)\rangle \end{aligned}\right\} \quad \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

$$I_p(w) = \langle w, w\rangle_p = \langle a x_u(q) + \beta x_v(q), a x_u(q) + \beta x_v(q)\rangle_p$$

$$= a^2 \langle x_u(q), x_u(q)\rangle + 2a\beta \langle x_u(q), x_v(q)\rangle + \beta^2 \langle x_v(q), x_v(q)\rangle$$

$$I_p(u) = a^2 E(q) + 2a\beta F(q) + \beta^2 G(q)$$

$$w = a x_u(q) + \beta x_v(q) \in T_pS$$

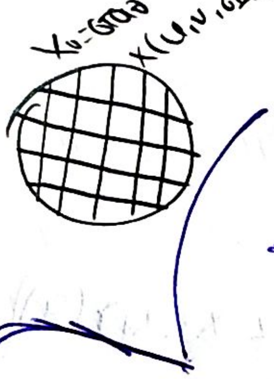
$$\|w\| = \sqrt{I_p(u)} = \sqrt{Ea^2 + 2Fa\beta + G\beta^2}$$

$$E > 0, \quad EG - F^2 > 0, \quad G > 0$$

$$E = \|x_u\|^2 > 0, \quad G = \|x_v\|^2$$

$$\|x_u \times x_v\|^2 = \|x_u\|^2 \cdot \|x_v\|^2 = \langle x_u, x_v\rangle^2$$

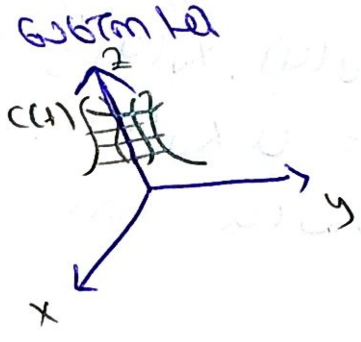
$$\|x_u \times x_v\|^2 = EG - F^2 > 0 \iff 0 < \|x_u \times x_v\| = \sqrt{EG - F^2}$$



Φ = γωνία των παραμετρικών καμπυλών

$$\cos\Phi = \frac{\langle x_u, x_v\rangle}{\|x_u\|\|x_v\|} \iff \cos\Phi = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

Το x καλείται ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $\iff F = 0$



$$c(t) = (f(t), 0, g(t))$$

$$x(t,\theta) = (f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta, g(t))$$

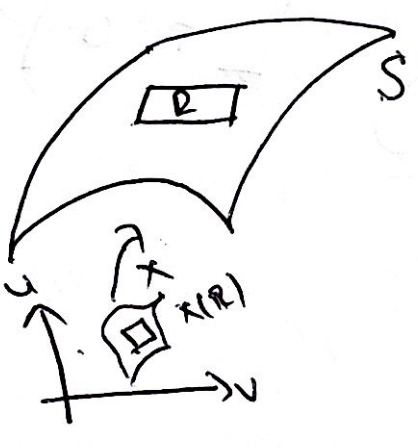
$$F = \langle x_t, x_\theta\rangle = 0$$

Εμβαδόν χωρίων σε κανονικές επιφάνειες

Έστω χωρίο $R \subseteq S$

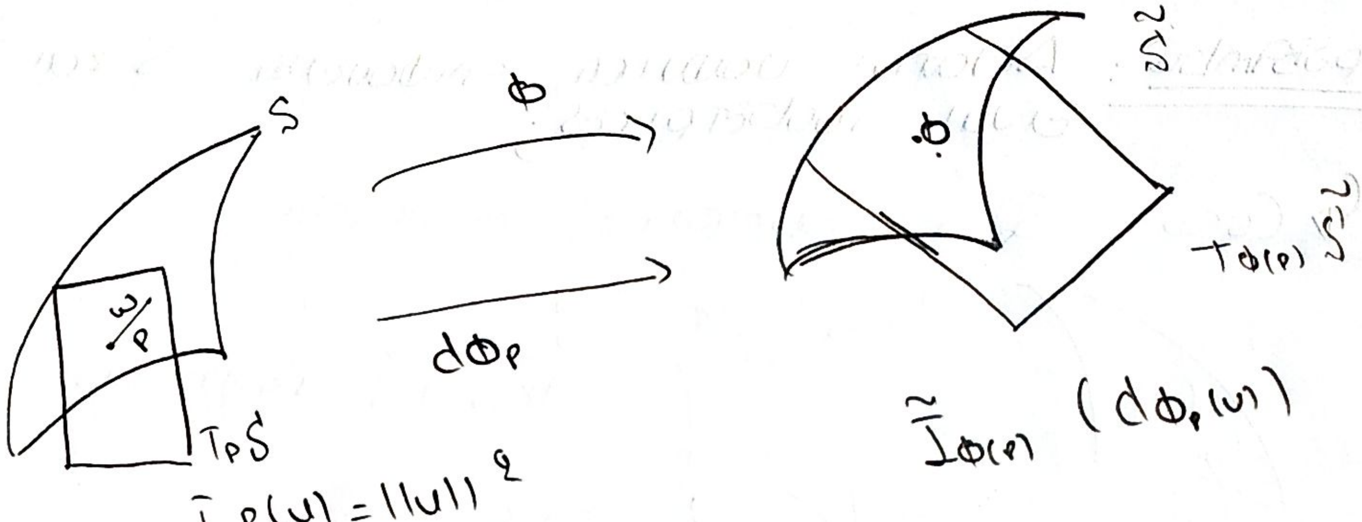
$$\text{Εμβαδόν}(R) = \iint_{x^{-1}(R)} \|x_u \times x_v\| \, du \, dv =$$

$$\iint_{x^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv$$



Εσωτερική γωνία: Η μελέτη γεωμετρικών αναλλοίωτων που ορίζονται μόνο μέσω της 1ης θεμελ. μορφής.

Ισομετρίες μεταξύ κανονικών επιφανειών:



Ορισμός: Μια απεικόνιση $\phi: S \to \tilde{S}$ καλείται ισομετρία

$\iff$ i) Η ϕ είναι διαφορομορφισμός

ii) $\forall p \in S$, $\forall w \in T_pS$, $I_p(w) = \tilde{I}_{\phi(p)}(d\phi_p(w))$

$\iff \forall p \in S$, $\forall w_1, w_2 \in T_pS$, $\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\phi_p(w_1), d\phi_p(w_2) \rangle$

Ισομετρικές επιφάνειες

Ορισμός: Μια κανονική επιφάνεια S καλείται ισομετρική $\tilde{S}$ αν-ν υπάρχει ισομ. $\phi: S \to \tilde{S}$

- $Id: S \to S$: ισομετρία

  $Id(p) = p$

- $\phi: S \to \tilde{S}$ ισομετ. $\Rightarrow$ $\phi^{-1}: \tilde{S} \to S$ ισομετρ.
- $\phi_1: S_1 \to S_2$; $\phi_2: S_2 \to S_3$ ισομετρία $\Rightarrow$

  $\phi_2 \circ \phi_1 : S_1 \to S_3$

  ισομετρία

Πρόταση: Αν $S, \tilde{S}$ είναι γεωμετρικά ισοδύναμες, τότε είναι και ισομετρικές.

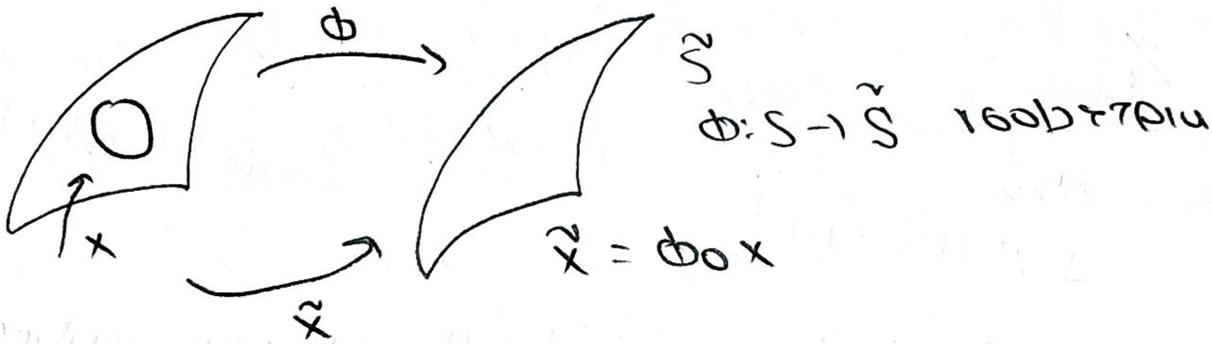
Απόδ

$\exists\, T \in Isom(\mathbb{R}^3)$, $\tilde{S} = T(S)$, ορίζω $\phi : S \to \tilde{S}$

$\phi = T|_S$, $T = T_v \circ A$, $dT = dA = A$

Πρόβλημα: Δίνονται κανονικές επιφάνειες S και $\tilde{S}$ είναι ισομετρικές;

↳ Έστω $S, \tilde{S}$ ισομετρικές επιφάνειες



$E = \|x_u\|^2$, $F = \langle x_u, x_v \rangle$, $G = \|x_v\|^2$

Ορίζω την $\tilde{x} = \phi \circ x : U \to \tilde{S}$, η οποία είναι σύστημα συντεταγμένων με κοινές παραμέτρους $(u,v) \in U$ και θεωρούμε τα ποσά πρώτης τάξης $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G} : U \to \mathbb{R}$

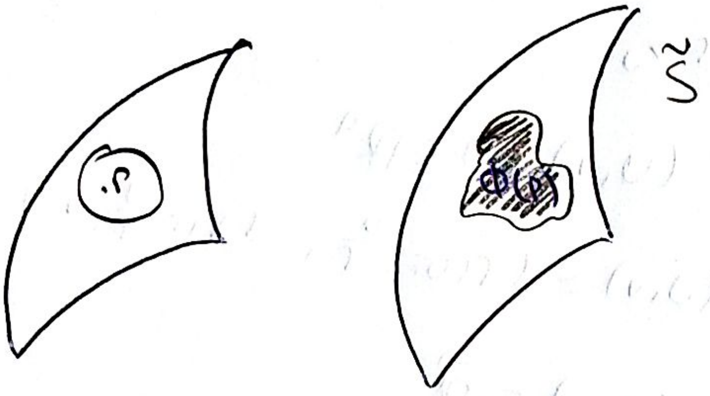
$$\tilde{E} = \|\tilde{x}_u\|^2 = \|d\tilde{x}(e_1)\| = \|d\phi(dx(e_1))\|^2 = \tilde{I}(d\phi(x_u)) = I(x_u) = \|x_u\|^2 = E$$

$\tilde{F} = \langle \tilde{x}_u, \tilde{x}_v \rangle$, $\tilde{G} = \|\tilde{x}_v\|^2$

$\tilde{E} = E$, $\tilde{F} = F$, $\tilde{G} = G$

$$\tilde{F} = \langle \tilde{x}_u, \tilde{x}_v \rangle = \langle d\phi(x_u), d\phi(x_v) \rangle = \langle x_u, x_v \rangle = F$$

Πρόταση: Έστω $S, \tilde{S}$ κανονικές επιφάνειες και $x: U \to S$, $\tilde{x}: U \to \tilde{S}$, συστήματα συντεταγμένων με κοινές παραμέτρους $(u,v) \in U$.



Αν ισχύει $\tilde{E}=E$, $\tilde{F}=F$, $\tilde{G}=G$ τότε η απεικόνιση $\tilde{x}\circ x^{-1}: x(U) \to \tilde{x}(U)$ είναι ισομετρία.

Απόδειξη

Ορίζω ως $\phi = \tilde{x}\circ x^{-1}$ είναι διαφόρ., $q \in U$, $p \in x(q)$ $\Rightarrow \phi(p) = \tilde{x}(q)$

$I_p(w) = I_p(a x_u + b x_v) = E a^2 + 2E ab + G b^2$

$\tilde{I}_{\phi(p)}(d\phi_p(w))$

$d\phi_p(w) = ;$

Θεωρώ $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$, $c(t) = x(u(t), v(t))$, $c(0) = p$, $c'(0) = w$.

$w = u'(0)\, x_u(\cdot) + v'(0)\, x_v$, $a = u'(0)$, $b = v'(0)$

$d\phi_p(w) = (\phi\circ c)'(0)$

$\phi\circ c(t) = \phi(x(u(t), v(t))) = \phi\circ x(u(t), v(t))$
$= \tilde{x}(u(t), v(t))$

$(\phi\circ c)'(0) = u'(0)\, \tilde{x}_u + v'(0)\, \tilde{x}_v$

$d\phi_p(w) = a\, \tilde{x}_u + b\, \tilde{x}_v$

$\tilde{I}_{\phi(p)}(d\phi_p(w)) = \tilde{E} a^2 + 2\tilde{F} ab + \tilde{G} b^2$

S = επίπεδο το οποίο διέρχεται από το P_0 και είναι παράλληλο προς τα $\vec{a}, \vec{b}$ με $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$, $\|\vec{a}\| = 1 = \|\vec{b}\|$.

$$\tilde{S} : x^2 + y^2 = r^2, \quad r > 0$$

$$x(u,v) = P_0 + u\vec{a} + v\vec{b}, \quad (u,v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

$$\frac{x}{r} = \cos u$$

$$\frac{y}{r} = \sin u$$

$$\tilde{x}(u,v) = \left(r\cos\frac{u}{r}, r\sin\frac{u}{r}, v\right)$$

$$x_u(u,v) = \vec{a}$$

$$x_v(u,v) = \vec{b}$$

$$\vec{E} = \|x_u\|^2 = \|\vec{a}\|^2 = 1$$

$$\vec{F} \ \langle x_u, x_v \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

$$\vec{G} = \|x_v\|^2 = \|\vec{b}\|^2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x}_u = (-\sin u, \cos u, 0)$$

$$\tilde{x}_v = (0, 0, 1)$$

$$\tilde{E} = \|\tilde{x}_u\|^2 = r^2$$

$$\tilde{F} = \langle \tilde{x}_u, \tilde{x}_v \rangle = 0$$

$$\tilde{G} = \|\tilde{x}_v\|^2 = 1.$$